جامعة البعث كلية العلوم قسم الرياضيات	امتحان مقرر تمديدات الحقول لطلاب السنة الرابعة رياضيات (شعبة الجبر) الفصل الثاني لعام ٢٠١٦ - ٢٠١٧	المدة: (١١-١٢،٣٠) العلامة: (100) الاسم:

س١- (العلامة: 30) حدد أي التقارير الآتية صحيح وأيها خاطئ <u>مع التعليل لكل منها</u> :

١) مميز nZ هو العدد n ؟

٢) $\sqrt{1+\sqrt{5}}$ جبري على Q؟

٣) كل امتداد منته لكل حقل F يكون امتدادا قابل الفصل على F ؟

٤) كل مثالي رئيس في حقل هو مثالي أعظمي فيه ؟

٥) يوجد حقل منته زمرته الضربية تتألف من 124 عنصرا ؟

٦) كل حدودية غير خزولة على حقل تكون غير قابلة للفصل عليه ؟

س٢: (العلامة: 40)

١- أثبت صحة المبرهنة : إذا كان F حقلا وكانت $p(x)$ حدودية غير خزولة على F فإن $F(x)/p(x)$ هو حقل ممدد للحقل F ، و $p(x)$ لها جذر في $F(x)/p(x)$

٢- كتطبيق على(١) اثبت أن الحدودية $g(x)=x^{2}+x+1$ غير خزولة على $Z_{2}[x]$ ، أوجد حقلا يحوي جذرا لهذه الحدودية

٣- اثبت أن أي حقل ممدد منته E من الدرجة n على حقل F ، هو حقل ممدد جبري للحقل F أوجد $[Q(\sqrt{3},\sqrt[3]{3}):Q]$.

س٣ (العلامة: 30) عرف مايلي :

١) حقل التفريق لحدودية $f(x)$ ، ثم أوجد حقل التفريق E للحدودية $x^{4}+1$ على Q ، أوجد عناصر الزمرة $Aut(E: \ )$

٢) التمديد الناظمي للحقل E على الحقل F ، ثم تحقق من أن R:Q ناظمي أم لا ؟

٣) حقل التمديد الانفصالي E للحقل F ، ثم أوجد حقل التفريق الانفصالي للحدودية $x^{3}-2$ على Q .

مع تمنياتي بالنجاح   مدرس المقرر: أ. د. محسن شيحة

حمص في ١٨ / ٧ / ٢٠١٧

الاجوبة النموذجية لمقرر تمديدات الحقول لطلاب السنة الرابعة رياضيات (جبر) للفصل الثاني (٢٠١٦ - ٢٠١٧).

الجواب الاول: $(6\times 5=30)$

١- مميز nZ هو n (X) لأن مميز nZ هو مميز Z ويساوي الصفر.

٢- $\sqrt{1+\sqrt{5}}$ جبري على Q (✓) لأن العدد المذكور صفر للحدودية x^4-2x^2-4 على Q.

٣- كل امتداد منته لكل حقل

٤- كل مثالي رئيس في حقل F يكون امتداداً قابلاً للفصل على F (X) الا اذا كان كل عنصر من E منفصل على

٥- يوجد حقل هو مثالي أعظمي فيه (X) ان $A=(p(x))$ أعظمي اذا وفقط اذا كانت $p(x)$ غير مختزلة

٦- كل حدودية غير مختزلة على حقل تكون غير قابلة للفصل عليه (X) الا اذا كان مميز الحقل عدد أولي.

يوجد حقل زمرته الضربية تتألف من 124 عنصراً (✓) لأنه يوجد حقل يتألف من $5^3=125$ عنصراً.

الجواب الثاني: اثبات المبرهنة

أ) ان المثالي الرئيس $A=(p(x))$ أعظمي للحلقة $F[x]$ وبالتالي فان $F[x]/A$ حقل ان المجموعة $K=\{a+A;\ a\in F\}$ حقل جزئي من $F[x]/A$ يماثل الحقل F وبالتالي $F[x]/A$ هو تمديد الحقل K الذي يماثل F، اذن $F[x]/A$ تمديد للحقل F.

لنفرض ان $p(x)=a_0+a_1x+\dots+a_nx^n$ ولنرمز للعنصر $x+A\in F[x]/A$ بالرمز α فيكون، $p(\alpha)=a_0+a_1(A+x)+\dots+a_n(A+x)^n$

أي: $p(\alpha)=A+(a_0+a_1x+\dots+a_nx^n)=A$

لكن A صفر الحقل $F[x]/A$ اذن α صفر الحدودية $p(x)$ في $F[x]/A$.

ب) نثبت ان الحدودية $x^2+x+1\in Z_2[x]$ غير مختزلة على $Z_2[x]$، نلاحظ ان $\deg p(x)=2$ وبالتالي تكون مختزلة على Z_2 اذا وجد لها جذر في Z_2، لكن $Z_2=\{0,1\}$، بالتجريب نجد:

$p(0)=(0)^2+(0)+1=1\neq 0$ ، $p(1)=(1)^2+(1)+1=1\neq 0$

وبالتالي Z_2 لا تحوي جذراً لها ومنه $p(x)$ غير مختزلة في $Z_2[x]$

ان. $(p(x))=(x^2+x+1)$ مثالي أعظمي في $Z_2[x]$ ومنه ثم فان $Z_2[x]/(p(x))$ تمديداً لـ $Z_2[x]$ يحوي جذراً لـ $p(x)$.

نرمز لـ α جذراً لـ $p(x)$ في E أي $\alpha^2+\alpha+1=0$ ومنه $\alpha^2=-\alpha-1$ وباعتبار ان $\operatorname{char}E=\operatorname{char}Z_2=2$ ينتج ان: $\alpha^2=-\alpha-1=\alpha+1$ ومنه

$\alpha^3=\alpha^2\cdot\alpha=\alpha(\alpha+1)=\alpha^2+\alpha=\alpha+1+\alpha=1$

أي ان $Z_2[x]/(x^2+x+1)=\{a\alpha+b,\ a,b\in Z_2\}$، نعطي a، b جميع القيم الممكنة:

$a=(0,0,1,1)$ ، $b=(0,1,0,1)$ ومنه $E=\{0,1,\alpha,\alpha+1\}$

وبما ان $\operatorname{char}E=p=2$ ، $\deg(\alpha,F)=n=2$ فان $2^2=p^2=4$.

جواب السؤال الثالث

لتكن E ممددة منتهية من الدرجة n من حقل F ولنثبت أن E ممدد جبري لـ F. إذا كان $\beta \in E$ فإن $1, \beta, \ldots, \beta^n$ مجموعة غير مستقلة خطياً في E (كفضاء متجهي على F بعده n) وبالتالي توجد $a_i \in F$ غير معدومة جميعها وتحقق: $a_0 + a_1\beta + \cdots + a_n\beta^n = 0$ وبالتالي توجد حدودية $f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ من $F[x]$ بحيث $f(\beta) = 0$ وبالتالي β جبرية و E ممدد جبري لـ F.

لإيجاد $[Q(\sqrt{3}, \sqrt[3]{3}) : Q]$ لدينا:

$$[Q(\sqrt{3} ; \sqrt[3]{3}) : Q] = [Q(\sqrt{3})(\sqrt[3]{3}) : Q(\sqrt{3})] \cdot [Q(\sqrt{3}) : Q] = \deg(x^3 - 3) \cdot \deg(x^2 - 3)$$
$$= 3 \cdot 2 = 6$$

الجواب الثالث:

(أ) حقل التفريق لحدودية $f(x)$: نقول عن حقل E أنه حقل تفريق لحدودية $f(x) \in F[x]$ من F إذا كان: $F \subseteq E$ وكانت $f(x)$ تتفرق في E وكان $E = f(b_1, \ldots, b_n)$

لاحظ أن $x^4 + 1 = (x^2 - \sqrt{2}x + 1)(x^2 + \sqrt{2}x + 1)$ ومن ثم فإن أصفار $x^4 + 1$ هي:

$$x = \frac{\sqrt{2} \mp \sqrt{2-4}}{2}, \quad \frac{-2 \mp \sqrt{2-4}}{2} = \frac{\mp\sqrt{2} \mp \sqrt{2}i}{2}$$

وبالتالي حقل تفريق $x^4 + 1$ من Q^2 هو $(Q\sqrt{2} ; i)$ وتكون $Aut(E ; Q) = Aut [Q\sqrt{2}, i) : Q]$ ومنه $ord(Aut(E : Q)) = [E : Q] = 4$ وعناصر الزمرة $Aut(E : Q)$ هي:

١- التطبيق المطابق حقله الثابت E

٢- φ_1 الذي يصور $\sqrt{2}$ بـ $-\sqrt{2}$ و i بـ i حقله الثابت $Q(i)$

٣- φ_2 الذي يصور $\sqrt{2}$ بـ $\sqrt{2}$ و i بـ $-i$ حقله الثابت $Q(\sqrt{2})$

٤- φ_3 حيث $\varphi_3 = \varphi_1 \circ \varphi_2$ الذي يصور $\sqrt{2}$ بـ $-\sqrt{2}$ و i بـ $-i$ وحقله الثابت $Q(\sqrt{-2})$. وتكون الحقول الجزئية الفعلية هي $(Q ; Q(\sqrt{-2}) ; Q(i), Q(\sqrt{2}) ; Q)$.

ثانياً: نقول عن تمديد $E : F$ أنه ناظمي إذا كان لأي كثيرة حدود غير قابلة للتحليل من F جذر واحد من الأقل في E، كانت جميع جذورها في E. وإن $Q(\sqrt[3]{2}) : Q$ ليست ناظمية لأن الحدودية $x^2 + 1$ ليس لها جذر.

ثالثاً: نقول عن ممددة منتهية E للحقل F أنه ممدد انفصالي للحقل F إذا كان $\{E : F\} = [E : F]$ حيث $\{E : F\}$ يساوي عدد التماثلات الداخلية التي تترك F ثابتاً و $[E : F]$ درجة تمديد E من F.

لدينا:

$$x^3 - 2 = (x - \sqrt[3]{2})(x^2 + \sqrt[3]{2}x + \sqrt[3]{4}) = 0 \Rightarrow$$

$$x = \sqrt[3]{2} ; \quad x = \frac{-\sqrt[3]{2} \mp \sqrt{\sqrt[3]{4} - 4\sqrt[3]{4}}}{2} = \frac{\sqrt[3]{2}\,[-1 \mp \sqrt{3}i]}{2}$$

وبالتالي حقل التفريق هو $Q(\sqrt[3]{2} ; i\sqrt{3})$

انتهت الأجوبة — د. [توقيع]